باب مساحت از کتاب

جبر و مقابلهٔ خوارزمی

بابی از میراث ۱۲۰۰ سالهٔ خوارزمی

عباس قلعه‌پوراقدم
دبیر ریاضی ارومیه

چکیده

در این مقاله، به باب مســاحت از کتــاب «جبر و مقابله» **خوارزمی** می‌پردازیم. خوارزمی در این باب، پس از تعریف واحد ســطح، اندازه‌گیری مساحت شکل‌هایی چون مربع، مستطیل، مثلث، لوزی و دایره را شــرح می‌دهد. درخصوص دایره، تقریب $\frac{۲۲}{۷}$ را برای عدد پی به‌کار می‌بندد و پس از توضیح نظر هندیان در مورد نحوهٔ محاسبهٔ محیط و مساحت دایره، نظر خود را بیان می‌دارد و چند حکم را در این مورد مطرح می‌کند. در مقالهٔ حاضر برای دو مورد از این احکام، به زبان امروزی برهان ارائه می‌کنیم. خوارزمی در پایان این باب، مسئله‌ای را مطرح و حل می‌کند که حل آن را به‌همراه صورت امــروزی آن و نیز اثباتی دیگر بر آن ارائه می‌دهیم.

کلیدواژه‌ها: محمدبن موســی خوارزمی، جبر و مقابله، باب مساحت

کتاب «المختصر فی‌الحســاب الجبــر و المقابله» یکی از شــاهکارهای محمدبن موسی خوارزمی (درگذشتهٔ حدود ۲۳۲ ق) در زمینــهٔ ریاضیات اســت که همچون نگینــی در میراث علمی ۱۲۰۰ ســالهٔ او می‌درخشــد. اینکه اکنــون در ایران به ترجمهٔ فارسی این کتاب ارزنده دسترسی داریم، مرهون تشویق ریاضی‌دان فرزانه، زنده‌یاد **پرویز شهریاری**، و همت عالی ادیب وارسته، شادروان **حسین خدیوجم** است. کتاب، حاوی باب‌های متفاوتی همچون تعریف جبر و مقابله، تقسیم معادلات درجهٔ اول و دوم به انواع شــش‌گانه، ضرب و تقسیم عبارت‌های رادیکالی، مسئله‌های مربوط به معاملات، وصیت و مقاسمه (تقسیم اموال مشترک) است.

فصل نهم کتاب «باب مســاحت» نام دارد که در این مقاله قصد دارم به اختصار بــه آن بپردازم. خوارزمی در آغاز این باب، واحد سطح را چنین تعریف می‌کند:

«بدان که معنی **یک ضرب در یک** تعیین مساحت است و مفهوم آن یک ذراع ضرب در یک ذراع اســت. پس هر سطح متســاوی‌الاضلاع و الزوایا را که ضلع آن از هر طرف واحد باشد، واحد می‌گویند.»

نکتهٔ ۱: «ذراع» واحدی قدیمی برای اندازه‌گیری طول است.
نکتهٔ ۲: مقصود خوارزمی از «ســطح متســاوی‌الاضلاع و الزوایا»، همان شکلی است که آن را با نام «مربع» می‌شناسیم.

خوارزمی، شرح محاســبهٔ مساحت مربع را این‌چنین ادامه می‌دهد:

«اگر هر ضلع در سطحی دو ذراع و آن سطح متساوی‌الاضلاع و الزوایا باشـــد، تمام ســـطح آن چهار برابر سطحی است که هر ضلعش یک ذراع باشد. همچنین است سه ضرب در سه یا بیشتر از آن یا کمتر، نیز چنین است «نصف ضرب در نصف» که می‌شود یک‌چهارم و دیگر کسرها بر همین نحو است.»

نکتهٔ ۳: اگر طول ضلع مربعی را k برابر کنیم، مساحت آن $k^۲$ برابر می‌شود.

وی در ادامه پس از تعریف مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و لوزی محیط دایره را شرح می‌دهد:

«هـــر گاه، قطر مُدَوّرة را در «ســـه و یک‌هفتم» ضرب کنی، حاصل ضرب عبارت است از دَور که بر آن دایره محیط است و این اصطلاحی است که در میان مردم، بدون چون و چرا، رایج است.»

نکتهٔ ۴: واژه‌های «مُدَوّرة» و «دَور» به ترتیب به معنای دایره و محیط (پیرامون) هستند. در محاسبهٔ محیط یا پیرامون دایره که برابر قطر ضرب در عدد پی (π) اســـت، در دوره‌های متفاوت، مقدار تقریبی π عددهایی همچون $\sqrt{۱۰}$، ۳/۱۴۱۶، $\frac{۶۲۸۳۲}{۲۰۰۰۰}$، $\frac{۲۲}{۷}$ و ... گرفته شده است. خوارزمی در حاشیهٔ متن، نظر خود را درخصوص تقریب مناسب برای عدد پی این‌گونه بیان می‌دارد:

«مقدار آن تقریبی اســـت نه تحقیقی، و جز خدا هیچ‌کس بر حقیقت آن آگاه نیست. کســـی مقدار دقیق پیرامون دایره را نمی‌شناسد، زیرا این خط مستقیم نیست که بتوان اندازهٔ دقیق آن را دریافت، بلکه این عدد تقریبی است. همچنان که مقدار جذر اصم تقریبی اســـت نه تحقیقی، زیرا جذر اصم را جز خدا کسی نمی‌دانـــد. بهتر از تمام این اقوال آن اســـت که قطر را در **سه و یک‌هفتم** ضرب کنی که این شیوه نیکوتر است.»

نکتهٔ ۵: $\frac{۲۲}{۷} = ۳\frac{۱}{۷}$

سپس عقاید هندیان را در مورد نحوهٔ محاسبهٔ محیط دایره چنین شرح می‌دهد:

«اهـــل هند در این مورد دو عقیده اظهار کرده‌اند: یکی آنکه هرگاه قطر در مانند خودش ضرب شود و حاصل آن در ده ضرب گردد، آن‌گاه جذر حاصل‌ضـــرب را بگیرند، مقدار این جذر برابر است با دور یا پیرامون دایره.»

نکتهٔ ۶: $\sqrt{۲r \times ۲r \times ۱۰} = ۲r \times \sqrt{۱۰}$

مقصود آن است که اهل هند تقریب $\sqrt{۱۰}$ را برای عدد پی به‌کار می‌بستند.

«عقیدهٔ دیگر از منجمان هند است. این گروه می‌گویند: باید قطر را در **شصت و دو هزار و هشتصد و سی و دو** ضرب کنی. سپس بر **بیست هزار** تقسیم نمایی که خارج‌قسمت هرچه باشد، مقدار دور یا پیرامون دایره اســـت. تمام این روش‌ها به یکدیگر نزدیک است.»

نکتهٔ ۷: $\frac{۶۲۸۳۲}{۲۰۰۰۰} = ۳/۱۴۱۶$

پس از بیان نظر هندیان، به‌صورت زیر عدد «سه و یک‌هفتم» یا $\frac{۲۲}{۷}$ را تقریب مناسب‌تری برای پی می‌داند:

«هـــر گاه دور یا پیرامون دایره را بر **سه و یک‌هفتم** تقسیم کنی، مقدار قطر به‌دست می‌آید. مساحت هر دایره عبارت است از حاصل‌ضرب **نصف قطر ضرب در نصف دور**.»

نکتهٔ ۸: $\frac{۲r}{۲} \times \frac{۲\pi r}{۲} = \pi r^۲$

وی در ادامـــه بـــا فرض مقدار تقریبی $\frac{۲۲}{۷}$ بـــرای عدد پی، مساحت دایره را طی حکمی چنین تعریف می‌کند:

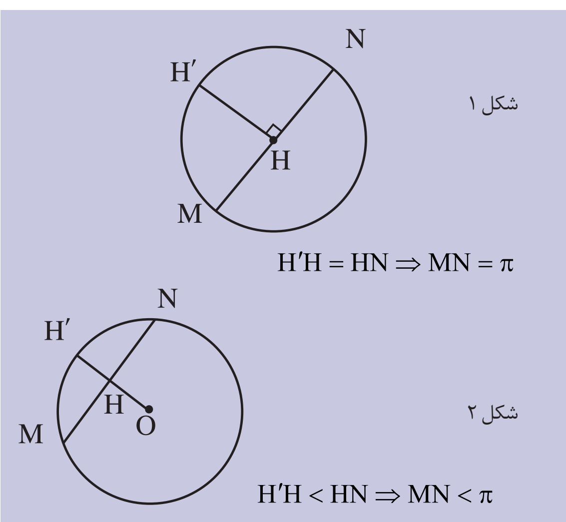
«اگر در هر دایره قطـــر را در مانند خودش ضرب کنند و از حاصل‌ضرب **یک‌هفتم** و نصف **یک‌هفتم** همین حاصل‌ضرب را کم کنند، مســـاحت دایره به‌دست می‌آید و این شیوه با باب اول موافق است.»

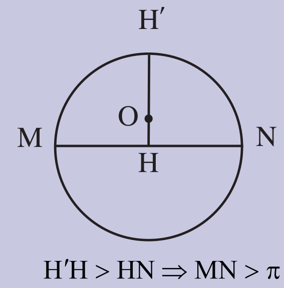
نکتهٔ ۹: $\text{قطر} \times \text{قطر} = ۲r \times ۲r = ۴r^۲ ,\ \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۷}) = \frac{۳}{۱۴}$

$$۴r^۲ - \frac{۳}{۱۴}(۴r^۲) = \frac{۲۲}{۷} r^۲$$

«سهم قوس» اصطلاحی است که خوارزمی در ادامهٔ مبحث دایره به آن اشاره می‌کند:

«هر قطعه از دایره با قوسی متناظر است. پس آن قطعه یا به اندازهٔ نصف دایره است، یا کمتر از نصف دایره، یا بیشتر از نصف





شکل ۳

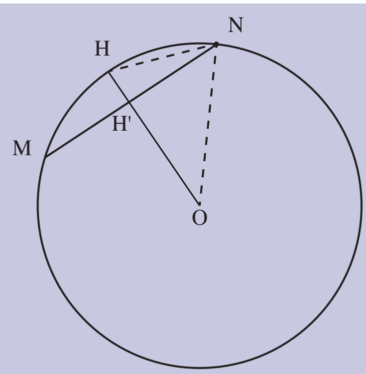
دایره. دلیل بر درستی این موضوع مقدار سهم قوس است. اگر سهم قوس با نصف وتر برابر باشد، مقدار قوس درست نیمی از دایره است. اگر از نصف وتر کمتر باشد، مقدار قوس از نصف دایره کمتر است. اگر سهم از نصف وتر بیشتر باشد، مقدار قوس از نصف دایره بیشتر است.»

نکتهٔ ۱۰: امروزه غالباً به جای واژهٔ قوس، از «کمان» استفاده می‌کنیم. سهم قوس، طول عمودی است که از نقطهٔ منتصف (وسط) قوس بر وتر وارد می‌شود. شکل‌های ۱ تا ۳، سه حالتی را که خوارزمی به آن‌ها اشاره می‌کند، نشان می‌دهند. در این شکل‌ها، طول 'HH همان سهم قوس است.

بحث با حکم زیر ادامه می‌یابد:

«اگر بخواهی بدانی که قوسی از کدام دایره است، نصف وتر را در مانند خودش ضرب و حاصل‌ضرب را بر سهم تقسیم می‌کنی و سپس خارج‌قسمت را بر سهم می‌افزایی که حاصل جمع عبارت است از قطر دایره‌ای که این قوس جزئی از آن است.»

نکتهٔ ۱۱: در این حکم به نحوهٔ محاسبهٔ مقدار عددی قطر دایره‌ای که کمانی از آن به همراه وتر نظیرش داده شده است، اشاره می‌شود. اجازه دهید آن را به‌صورت امروزی طی حکمی اثبات کنیم:



شکل ۴

در دایرهٔ به مرکز O، وتر نظیر کمان MN را در نظر بگیرید (شکل ۴). نشان دهید، قطر دایره برابر است با مجموع مربعات نصف وتر MN و سهم کمان MN تقسیم بر سهم کمان MN؛ یا به عبارت دیگر به قول خوارزمی:

$$\frac{H'N \times H'N}{HH'} + HH' = ۲OH$$

اثبات: 'HH سهم کمان MN است. N را به O (مرکز دایره) وصل می‌کنیم. با دو بار استفاده از قضیهٔ **فیثاغورس** داریم:

$$HN^{۲} = HH'^{۲} + H'N^{۲} \qquad (۱)$$

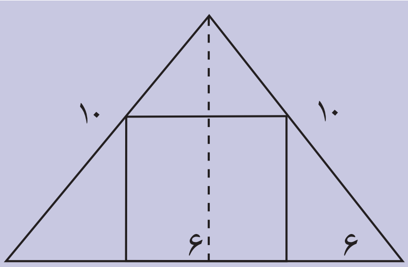
$$ON^{۲} = OH'^{۲} + H'N^{۲} \qquad (۲)$$

$$\begin{aligned}(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow HN^{۲} &= HH'^{۲} + ON^{۲} - OH'^{۲}\\ &= HH'^{۲} + ON^{۲} - (ON - HH')^{۲}\\ &= HH'^{۲} + ON^{۲} - ON^{۲}\\ &\quad - HH'^{۲} + ۲ON.HH'\\ &= ۲ON.HH'\end{aligned}$$

پس $\frac{HN^{۲}}{HH'} = ۲ON$ یا $\frac{HH'^{۲} + H'N^{۲}}{HH'} = ۲ON$. به‌عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\frac{H'N^{۲}}{HH'} + HH' = ۲ON = \text{قطر دایره}$$

باب مساحت با بحث در مورد نحوهٔ محاسبهٔ حجم مخروط و تعریف انواع مثلث ادامه می‌یابد. خوارزمی در پایان این فصل مسئله‌ای جالب را مطرح می‌کند که این قسمت از مقاله را با آن زینت می‌دهم و سپس صورت امروزی راه‌حل وی را به همراه اثباتی دیگر که ماهیت مثلثاتی دارد، ارائه می‌کنم. خوارزمی مسئله را این‌گونه طرح و حل می‌کند: «اگر گفته شود: زمینی مثلث‌شکل داریم که هر یک از دو ضلع جانبی آن ده ذراع و قاعدهٔ آن دوازده ذراع است. در میان این مثلث زمینی است چهارگوشه، طول هر ضلع این چهارگوشه چقدر است؟ (شکل ۵).



شکل ۵

راه‌حل آن چنین است: اول باید ارتفاع مثلث را به‌دست آوریم. یعنی نصف قاعده را که عبارت است از شش، در مانند خودش ضرب می‌کنی، می‌شود: سی‌وشش. این عدد را از مجذور یکی از دو ضلع کوتاه‌تر، که عبارت است از صد، کم می‌کنی، شصت‌وچهار

باقی می‌ماند. جذر آن را می‌گیری، می‌شود: هشت. این است ارتفاع مثلث و مساحت آن چهل‌وهشت ذراع است که از ضرب کردن عمود در نصف قاعده، یعنی از شش، به‌دست می‌آید. آن‌گاه یکی از اضلاع این چهارضلعی را شیء فرض می‌کنی و آن را در مانند خودش ضرب می‌کنی، می‌شود: مال. این مال را کنار می‌گذاری.

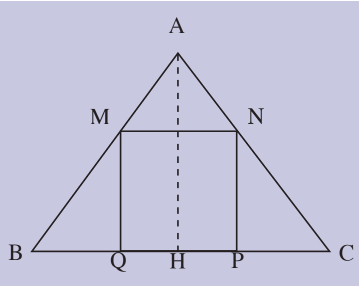
می‌دانیم که از تمام زمین دو مثلث در دو پهلو و یک مثلث در بالا باقی مانده است. دو مثلثی که در دو پهلوی چهارضلعی واقع شده، با هم برابرند و ارتفاع آن دو یکی است و هر دو قائم‌الزاویه هستند. پس برای تعیین مساحت آن‌ها شیء را در شش منهای نصف شیء ضرب می‌کنی، حاصل‌ضرب می‌شود: شش شیء منهای نصف مال که برابر است با مساحت آن دو مثلثی که در دو پهلوی چهارضلعی واقع شده است.

اما برای تعیین مساحت مثلث بالایی باید هشت منهای شیء را که عبارت است از ارتفاع، در نصف شیء ضرب کنی. حاصل‌ضرب می‌شود: چهار شیء منهای نصف مال. پس مساحت چهارضلعی به اضافهٔ مساحت مثلث‌های سه‌گانه می‌شود ده شیء و این ده شیء برابر است با چهل‌وهشت که عبارت است از مساحت مثلث بزرگ. پس یک شیء از آن برابر است با چهار ذراع و چهارپنجم ذراع، و آن اندازهٔ هر ضلع از مربع است.»

با این توضیح که مقصود جناب خوارزمی از واژه‌های «شیء» و «مال» به ترتیب x (مجهول و در اینجا طول ضلع مربع) و $x^۲$ (مربع مجهول و در اینجا مساحت مربع) است، مسئله را به‌صورت امروزی می‌نویسم و راه‌حل خوارزمی را بازنویسی می‌کنم:

مربع MNPQ محاط است درون مثلث ABC با ابعاد AB=AC=۱۰ و BC=۱۲. طول ضلع مربع را بیابید (شکل ۶).

راه‌حل: ارتفاع نظیر رأس A را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ H و ضلع MN از مربع را در E قطع کند. طول ضلع مربع را x می‌گیریم.



شکل ۶

مثلث ABC متساوی‌الساقین است، لذا AH میانهٔ وارد بر ضلع BC نیز هست. پس داریم: BH=HC=۶. از طرف دیگر، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم: $AH^۲=AC^۲-HC^۲$. یا: $AH^۲=۱۰۰-۳۶=۶۴$. در نتیجه: AH=۸. دو مثلث BMQ و NPC بنا به حالت برابری (زض‌ز) با هم هم‌نهشت هستند، پس: BQ=PC. لذا: $QH = HP = \frac{x}{۲}$. در نتیجه: $BQ = PC = ۶ - \frac{x}{۲}$. همچنین، از هم‌نهشتی دو مثلث برابر بودن مساحت آن‌ها نتیجه می‌شود. چون مساحت مثلث NPC برابر $\frac{x}{۲}(۶-\frac{x}{۲})$ است، پس مجموع مساحت‌های دو مثلث NPC و BMQ برابر $x(۶-\frac{x}{۲})$ یا $۶x-\frac{x^۲}{۲}$ خواهد شد. حال به محاسبهٔ مثلث بالایی (ΔAMN) می‌پردازیم.

مساحت این مثلث عبارت است از حاصل‌ضرب نصف AE در MN؛ یا: $x \times \frac{(۸-x)}{۲}$، و یا: $۴x-\frac{x^۲}{۲}$. مساحت مثلث ABC هم برابر با $\frac{۸\times ۱۲}{۲}$ یا ۴۸ است. پس می‌توان نوشت:

$$(۶x-\frac{x^۲}{۲})+(۴x-\frac{x^۲}{۲})+x^۲=۴۸$$
$$\Rightarrow ۱۰x=۴۸$$
$$\Rightarrow x=۴\frac{۸}{۱۰}=۴\frac{۴}{۵}$$

راه‌حلی دیگر از نویسندهٔ مقاله: چون MN با BC موازی است، پس: $\angle ANE = \angle C$. با فرض $\angle C = \alpha$ و AE=y، در دو مثلث AEN و NPC داریم:

$$\Delta AEN : \tan\alpha = \frac{AE}{EN} = \frac{y}{\frac{x}{۲}} = \frac{۲y}{x} \qquad (۱)$$

$$\Delta NPC : \tan\alpha = \frac{NP}{PC} = \frac{x}{۶-\frac{x}{۲}} = \frac{۲x}{۱۲-x} \qquad (۲)$$

$$(۱)=(۲) \Rightarrow ۲y(۱۲-x)=۲x^۲ \qquad (۳)$$

از طرف دیگر: x+y=۸ با جاگذاری y=۸-x در (۳) خواهیم داشت:

$$۲(۸-x)(۱۲-x)=۲x^۲$$
$$\Rightarrow x=\frac{۱۹۲}{۴۰}=۴\frac{۴}{۵}$$

منبع
۱. خدیوجم، حسین (۱۳۶۳). ترجمهٔ جبر و مقابلهٔ خوارزمی. انتشارات اطلاعات. تهران. چاپ سوم.